Exámenes de Selectividad

Física. Madrid 2024, Extraordinaria

mentoor.es

Pregunta 1. Opción A. Campo Gravitatorio

Un satélite de comunicaciones orbita alrededor de la Tierra en una trayectoria elíptica cuyo apogeo se encuentra a 39700 km de altitud sobre la superficie de la Tierra. Si el satélite da una vuelta completa cada 12 h, determine:

a) **La altura sobre la superficie terrestre a la que se encontrará el satélite en el perigeo de su trayectoria y la relación entre sus velocidades en el perigeo y en el apogeo ($\mathbf{v_p/v_a}$).**
b) **La velocidad del satélite en el perigeo y la velocidad hasta la que habría que reducir al satélite para que pasase de una órbita elíptica a una órbita circular de radio igual a la distancia al perigeo.**

Datos: Constante de Gravitación Universal, $\mathbf{G = 6,67 \cdot 10^{-11}}$ N m^2 kg^{-2}; Masa de la Tierra, $\mathbf{M_T = 5,97 \cdot 10^{24}}$ kg; Radio de la Tierra, $\mathbf{R_T = 6,37 \cdot 10^6}$ m.

Solución:

a) **La altura sobre la superficie terrestre a la que se encontrará el satélite en el perigeo de su trayectoria y la relación entre sus velocidades en el perigeo y en el apogeo ($\mathbf{v_p/v_a}$).**

A partir de la Tercera Ley de Kepler, podemos calcular el semieje mayor de la órbita elíptica:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T}a^3 \quad \Rightarrow \quad (12 \cdot 3600)^2 = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}a^3,$$

de donde obtenemos:

$$a = 2,66 \cdot 10^7 \,\text{m}.$$

Sabemos que el semieje mayor también se puede calcular como:

$$a = \frac{r_a}{2} + \frac{r_p}{2}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$2,66 \cdot 10^7 = \frac{6,37 \cdot 10^6 + 3,97 \cdot 10^7}{2} + \frac{6,37 \cdot 10^6 + h_p}{2},$$

y de aquí se deduce que la altura en el perigeo es:

$$h_p = 7,6 \cdot 10^5 \,\text{m} = 760 \,\text{km}.$$

En una órbita elíptica, se conserva el momento angular, es decir:

$$\vec{L}_a = \vec{L}_p,$$

donde

$$|\vec{L}_a| = mr_a v_a \sin(90°) = mr_a v_a \quad \text{y} \quad |\vec{L}_p| = mr_p v_p \sin(90°) = mr_p v_p.$$

Por lo tanto, se cumple que

$$mr_a v_a = mr_p v_p,$$

y la relación entre las velocidades es

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{6,37 \cdot 10^6 + 3,97 \cdot 10^7}{6,37 \cdot 10^6 + 7,6 \cdot 10^5} = 6,46.$$

Por lo tanto, la altura sobre la superficie terrestre a la que se encontrará el satélite en el perigeo de su trayectoria es 760 km y la relación entre sus velocidades en el perigeo y en el apogeo es 6,46.

b) **La velocidad del satélite en el perigeo y la velocidad hasta la que habría que reducir al satélite para que pasase de una órbita elíptica a una órbita circular de radio igual a la distancia al perigeo.**

Ahora, consideremos que la energía mecánica se mantiene constante a lo largo de toda la órbita:

$$E_m^{\text{perigeo}} = E_m^{\text{apogeo}}.$$

Entonces, podemos escribir:

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GmM_T}{r_p} = \frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GmM_T}{r_a},$$

Reemplazando la relación entre las velocidades:

$$\frac{1}{2}v_p^2 - \frac{GM_T}{r_p} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_p}{6,46}\right)^2 - \frac{GM_T}{r_a}.$$

Despejando v_p, se obtiene:

$$4,88 \cdot 10^{-1} v_p^2 = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \left(\frac{1}{6,37 \cdot 10^6 + 7,6 \cdot 10^5} - \frac{1}{6,37 \cdot 10^6 + 3,97 \cdot 10^7}\right).$$

Finalmente,

$$v_p = 9,84 \cdot 10^3 \,\text{m/s}.$$

Para una órbita circular, la relación entre la velocidad y el radio es:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM_T}{r^2}.$$

De esta forma, la velocidad orbital es:

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}.$$

Al reducir la velocidad del satélite hasta el valor necesario para tener una órbita circular con el radio del perigeo:

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 7,6 \cdot 10^5}} = 7,47 \cdot 10^3 \,\text{m/s} = 7,47 \,\text{km/s}.$$

Por ende, la velocidad del satélite en el perigeo es $\mathbf{9,84 \cdot 10^3}$ m/s y la velocidad hasta la que habría que reducir al satélite para que pasase de una órbita elíptica a una órbita circular de radio igual a la distancia al perigeo es $\mathbf{7,47}$ km/s.

Pregunta 2. Opción A. Ondas

Dos focos sonoros puntuales $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ están situados en las posiciones $(0,3)$ m y $(4,0)$ m del plano xy. Cuando emiten por separado, el nivel de intensidad sonora debido al foco 1 a una distancia de 2 m de este es $\beta_1 = 55$ dB, mientras que el nivel de intensidad sonora debido al foco 2 es $\beta_2 = 65$ dB a 2 m de este. Halle:

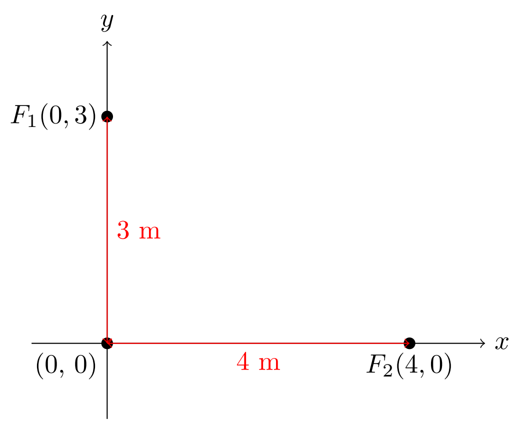
a) **La intensidad y el nivel de intensidad sonora en el origen cuando ambos focos emiten simultáneamente.**
b) **La distancia al foco $\mathbf{F_1}$ del punto situado sobre el segmento que une ambos focos en el que las intensidades generadas por ambos focos son iguales.**

Dato: Intensidad umbral, $\mathbf{I_0 = 1 \cdot 10^{-12}}$ W m^{-2}.

Solución:

a) **La intensidad y el nivel de intensidad sonora en el origen cuando ambos focos emiten simultáneamente.**

Primero, comenzamos representado la situación descrita por el problema:



Ahora, determinemos la potencia de cada uno de los focos sonoros. Para ello, calculamos la intensidad en una distancia de 2 metros para ambos focos.
Para el foco 1:

$$I_1(2\,\text{m}) = I_0 \cdot 10^{\beta_1/10} = 1 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{55/10} = 3,16 \cdot 10^{-7}\,\text{W/m}^2.$$

Para el foco 2:

$$I_2(2\,\text{m}) = I_0 \cdot 10^{\beta_2/10} = 1 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{65/10} = 3,16 \cdot 10^{-6}\,\text{W/m}^2.$$

Con estas intensidades, podemos calcular la potencia de cada uno de los focos:

$$P_1 = 4\pi(2)^2 I_1 = 1,59 \cdot 10^{-5}\,\text{W} \quad \text{y} \quad P_2 = 4\pi(2)^2 I_2 = 1,59 \cdot 10^{-4}\,\text{W}.$$

A continuación, calculemos las intensidades de los focos en el origen. Para el foco 1, ubicado a 3 metros del origen:

$$I_1(3\,\text{m}) = \frac{P_1}{4\pi(3)^2} = \frac{1,59 \cdot 10^{-5}}{4\pi(3)^2} = 1,41 \cdot 10^{-7}\,\text{W/m}^2.$$

Para el foco 2, situado a 4 metros:

$$I_2(4\,\text{m}) = \frac{P_2}{4\pi(4)^2} = \frac{1,59 \cdot 10^{-4}}{4\pi(4)^2} = 7,91 \cdot 10^{-7}\,\text{W/m}^2.$$

La intensidad total en el origen será la suma de ambas:

$$I_{total} = I_1 + I_2 = 1,41 \cdot 10^{-7} + 7,91 \cdot 10^{-7} = 9,31 \cdot 10^{-7}\,\text{W/m}^2.$$

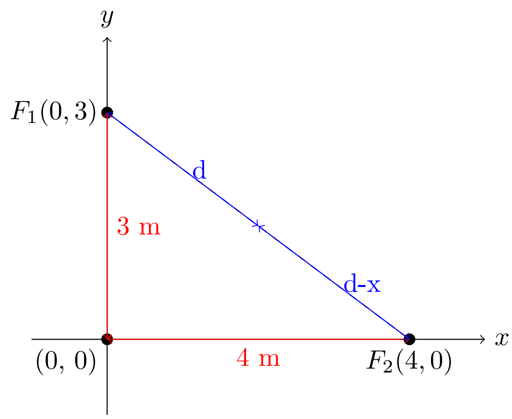
Finalmente, el nivel de intensidad sonora combinado se calcula como:

$$\beta_{total} = 10 \log \left(\frac{I_{total}}{I_0} \right) = 59,62 \, \text{dB}.$$

Por lo tanto, la intensidad pedida es $\mathbf{9,31 \cdot 10^{-7}}$ y el nivel de intensidad sonora es $\mathbf{59,62}$.

b) La distancia al foco $\mathbf{F_1}$ del punto situado sobre el segmento que une ambos focos en el que las intensidades generadas por ambos focos son iguales.

Comenzamos este apartado añadiendo el segmento descrito por el enunciado al dibujo anterior:



Para encontrar el punto donde las intensidades de los focos son iguales, supongamos que el punto se encuentra a una distancia x del foco F_1 y a $d - x$ del foco F_2, donde d se obtiene usando el Teorema de Pitágoras: $d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ metros. Igualamos las intensidades:

$$I_1(x) = I_2(d - x).$$

Sustituyendo las expresiones de las intensidades:

$$\frac{P_1}{4\pi x^2} = \frac{P_2}{4\pi(5 - x)^2}.$$

Simplificando:

$$9x^2 + 10x - 25 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática completa:

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{1000}}{18} = \begin{cases} -2,31 \, \text{m}, \\ +1,2 \, \text{m}. \end{cases}$$

Dado que buscamos el punto en el segmento que une los focos, la única solución válida es la positiva (estamos trabajando en el primer cuadrante). Por lo tanto, la distancia desde el foco F_1 es:

$$x = 1,2 \, \text{m}.$$

Por ende, la distancia al foco $\mathbf{F_1}$ del punto situado sobre el segmento que une ambos focos en el que las intensidades generadas por ambos focos son iguales es 1,2 m.

Pregunta 3. Opción A. Campo Electromagnético

Una partícula con carga 2 nC está situada en el origen de coordenadas mientras que una segunda partícula con carga 4 nC está situada en el punto $(6, 0)$ m del plano xy.

a) **Obtenga el campo eléctrico generado por ambas cargas en el punto $(2, 2)$ m.**

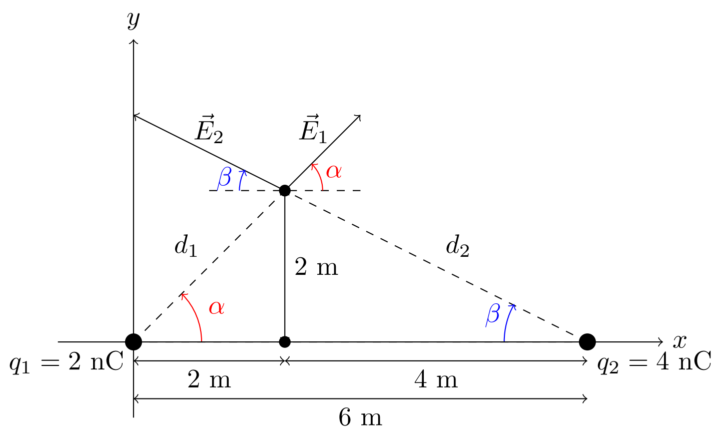
b) **Determine el punto situado entre ambas cargas en el que si situásemos un electrón la fuerza total sobre este sería nula. Obtenga el trabajo realizado por la fuerza electrostática para traer dicho electrón desde el infinito hasta el punto anterior.**

Datos: Constante de Coulomb, $K = 9 \cdot 10^9$ Nm^{2}C^{-2}.; Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Solución:

a) **Obtenga el campo eléctrico generado por ambas cargas en el punto $(2, 2)$ m.**

Representemos los datos proporcionados por el problema en un dibujo:



Para determinar el campo eléctrico generado en el punto $(2, 2)$ m por las dos cargas, primero calculamos el campo generado por cada una de las cargas individualmente y luego sumamos ambos de manera vectorial. Observando el esquema del problema proporcionado en el dibujo anterior obtenemos las siguientes relaciones:

$$\vec{E}_1 = K\frac{q_1}{d_1^2}\vec{u}_1 = K\frac{2 \cdot 10^{-9}}{2^2 + 2^2}\left(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}\right) = K\frac{2 \cdot 10^{-9}}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{j}\right) \text{ N/C},$$

$$\vec{E}_2 = K\frac{q_2}{d_2^2}\vec{u}_2 = K\frac{4 \cdot 10^{-9}}{2^2 + 4^2}\left(\cos\beta\,(-\vec{i}) + \sin\beta\,\vec{j}\right) = K\frac{4 \cdot 10^{-9}}{20}\left(\frac{4}{\sqrt{20}}\,(-\vec{i}) + \frac{2}{\sqrt{20}}\,\vec{j}\right) \text{ N/C}.$$

Sumando ambos campos eléctricos:

$$vecE_{\text{total}} = \left(-0,02\,\vec{i} + 2,40\,\vec{j}\right) \text{ N/C}.$$

Por lo tanto, el campo eléctrico generado por ambas cargas en el punto $(2, 2)$ m es $\left(-0,02\,\vec{i} + 2,40\,\vec{j}\right)$ N/C.

b) **Determine el punto situado entre ambas cargas en el que si situásemos un electrón la fuerza total sobre este sería nula. Obtenga el trabajo realizado por la fuerza electrostática para traer dicho electrón desde el infinito hasta el punto anterior.**

Para encontrar el punto entre las dos cargas donde la fuerza neta sobre un electrón sería nula, debemos tener en cuenta que dicho punto se encuentra en la línea que conecta ambas cargas, es decir, sobre el eje x.

Igualamos la fuerza resultante a cero:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad K\frac{qQ_1}{x^2} = K\frac{qQ_2}{(6-x)^2}.$$

Sustituyendo:

$$\frac{2}{x^2} = \frac{4}{(6-x)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{x} = \frac{2}{(6-x)}.$$

Resolviendo para x se obtiene:

$$x = 2,49\,\mathrm{m}.$$

Por lo tanto, el punto en el que la fuerza neta sobre el electrón es cero es $(2,49,0)\,\mathrm{m}$. Ahora que conocemos el punto donde situar el electrón, podemos calcular el trabajo realizado por el campo eléctrico generado por ambas cargas al traer el electrón desde el infinito hasta dicho punto:

$$\begin{aligned} W &= -q\Delta V = -q(V_f - V_0) = -q\left(K\frac{Q_1}{x} + K\frac{Q_2}{(6-x)}\right) \\ &= -(-1,6\cdot 10^{-19})\cdot 9\cdot 10^9\left(\frac{2\cdot 10^{-9}}{2,49} + \frac{4\cdot 10^{-9}}{3,51}\right) = 2,80\cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

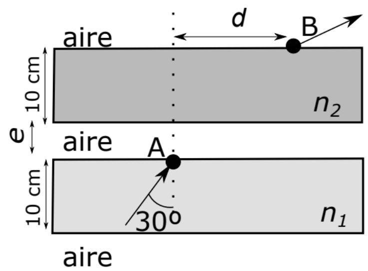
Por lo tanto, el punto situado entre ambas cargas en el que si situásemos un electrón la fuerza total sobre este sería nula es $(2,49,0)\,\mathrm{m}$ y el trabajo realizado por la fuerza electrostática para traer dicho electrón desde el infinito hasta dicho punto es $2,80\cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}$.

Pregunta 4. Opción A. Ondas

Dos cristales de grosor 10 cm e índices de refracción $n_1 = 1,40$ y $n_2 = 1,50$, están separados por una capa de aire de espesor desconocido, e. Un rayo de luz incide por el punto A desde el cristal 1 hacia el cristal 2 atravesando la capa de aire que los separa con un ángulo de incidencia de 30° y saliendo por el punto B tal y como se indica en la figura. Si la distancia horizontal entre los puntos A y B es $d = 9,2$ cm, determine:

a) **El espesor, e, de la capa de aire situada entre ambos cristales.**
b) **El tiempo que tarda el rayo de luz en llegar desde el punto A hasta el punto B.**

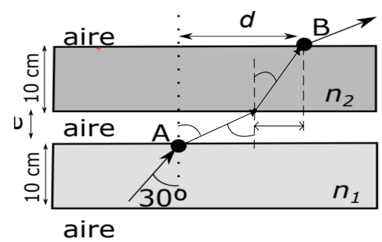
Datos: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}; Índice de refracción del aire, $n = 1$.



Solución:

a) **El espesor, e, de la capa de aire situada entre ambos cristales.**

Comenzamos realizando un esquema que ilustre los ángulos de refracción y la trayectoria del rayo:



Nótese que los ángulos señalados entre los dos cristales en la figura anterior son todos iguales y serán denotados como θ, mientras que el el ángulo en la cara interna del segundo cristal es θ'. Por otra parte, la distancia horizontal recorrida por el rayo de luz en el segundo cristal es d'.

Aplicamos la ley de Snell en el punto A y en la interface entre el aire y el segundo medio para determinar los ángulos de refracción:

$$n_1 \sin(30°) = 1 \cdot \sin\theta \quad \Rightarrow \quad 1.4 \sin(30°) = 1 \cdot \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = 44.43°,$$
$$1 \cdot \sin\theta = n_2 \sin(\theta') \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot \sin\theta = 1.5 \sin(\theta') \quad \Rightarrow \quad \theta' = 27.82°.$$

Con el ángulo θ' calculamos la distancia horizontal que el rayo recorre en el segundo medio:

$$d' = 10 \tan(\theta') = 10 \tan(27.82°) = 5.28\,\text{cm}.$$

Por lo tanto, el desplazamiento horizontal en el tramo de aire es:

$$d - d' = 9.2 - 5.28 = 3.92\,\text{cm}.$$

Con este valor, calculamos el grosor de la lámina de aire:

$$e = \frac{3.92}{\tan\theta} = 4\,\text{cm}.$$

Por lo tanto, el espesor es 4 cm.

b) **El tiempo que tarda el rayo de luz en llegar desde el punto A hasta el punto B.**

Para el recorrido del tramo AB, el rayo transita por un espacio s_1 en el aire y un espacio s_2 en el medio 2. Podemos calcular estos espacios utilizando los ángulos previamente determinados, así como los tiempos t_1 y t_2 que el rayo tarda en recorrer cada tramo:

$$s_1 = \frac{4}{\cos\theta} = \frac{4}{\cos 44.43°} = 5.60\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{s_1}{c} = 1.87\cdot 10^{-10}\,\text{s},$$

$$s_2 = \frac{10}{\cos\theta'} = \frac{10}{\cos 27.82°} = 11.31\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s_2 n_2}{c} = 5.65\cdot 10^{-10}\,\text{s}.$$

Finalmente, el tiempo total T es:

$$T = t_1 + t_2 = 1.87\cdot 10^{-10} + 5.65\cdot 10^{-10} = 7.52\cdot 10^{-10}\,\text{s}.$$

Por ende, el tiempo que tarda el rayo de luz en llegar desde el punto A hasta el punto B es $\mathbf{7.52\cdot 10^{-10}}$ s.

Pregunta 5. Opción A. Física Moderna

Para una prueba diagnóstica se utiliza una cierta cantidad del isótopo 99 del tecnecio (^{99}Tc) cuyo tiempo de semidesintegración es de 6 h. Sabiendo que la actividad de la dosis que hay que inocular al paciente es de $5 \cdot 10^8$ Bq, determine:

a) **La masa de isótopo que hay que inyectar al paciente.**
b) **El tiempo que debe transcurrir para que la actividad sea de $1 \cdot 10^4$ Bq.**

Datos: Masa atómica del ^{99}Tc, $M_{^{99}\mathrm{Tc}} = 98,9\,\mathrm{u}$; Número de Avogadro, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$.

Solución:

a) **La masa de isótopo que hay que inyectar al paciente.**

Para determinar la masa inicial requerida, primero calculamos el número de núcleos iniciales N_0:

$$A_0 = \lambda N_0 \quad \Rightarrow \quad N_0 = \frac{A_0}{\lambda},$$

donde λ es la constante de desintegración, que se obtiene mediante la relación:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = 0.116\,\mathrm{h}^{-1} = 3.21 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Sustituyendo los valores, encontramos:

$$N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = 1.56 \cdot 10^{13}\,\text{núcleos}.$$

Para calcular la masa inicial m_0, utilizamos la masa atómica del isótopo y el número de Avogadro:

$$m_0 = \frac{N_0 \cdot M_{99Tc}}{N_A} = 2.56 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{g}.$$

Por lo tanto, la masa de isótopo que hay que inyectar al paciente es $2.56 \cdot 10^{-9}$ g.

b) **El tiempo que debe transcurrir para que la actividad sea de $1 \cdot 10^4$ Bq.**

Para determinar el tiempo que transcurrirá hasta que la actividad alcance $A = 1 \cdot 10^4\,\mathrm{Bq}$, utilizamos la ley de desintegración:

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

Al sustituir los valores, obtenemos:

$$t = 3.37 \cdot 10^5\,\mathrm{s} \approx 3.9\,\text{días}.$$

Por ende, han de transcurrir 3.9 días para que la actividad sea de $1 \cdot 10^4$ Bq.

Pregunta 1. Opción B. Campo Gravitatorio

Dos planetas de masas iguales orbitan en torno a una estrella de masa mucho mayor. El primero de los planetas tiene una órbita circular de radio $1,2 \cdot 10^{11}$ m y un período de 3 años. El segundo planeta sigue una órbita elíptica tal que la distancia más próxima a la estrella es de $1,0 \cdot 10^{11}$ m y la más lejana de $1,8 \cdot 10^{11}$ m.

a) **Determine la masa de la estrella y el período del segundo planeta.**
b) **Calcule la velocidad orbital del primer planeta y, sabiendo que su energía mecánica en su órbita circular es de $-3,8 \cdot 10^{30}$ J, halle la masa de los planetas.**

Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$.

Solución:

a) **Determine la masa de la estrella y el período del segundo planeta.**

Para calcular la masa de la estrella, aprovechamos que el planeta 1 se mueve en una órbita circular. La ecuación que describe el movimiento es:

$$\frac{GM_EM_1}{r_1^2} = M_1a_n = M_1\frac{v^2}{r_1} = M_1\frac{4\pi^2r_1}{T^2}.$$

Despejando para la masa de la estrella M_E, obtenemos:

$$M_E = \frac{4\pi^2r_1^3}{GT^2} = 1,14 \cdot 10^{29}\,\text{kg}.$$

Ahora, para determinar el período del planeta 2, usamos la Tercera Ley de Kepler. Necesitamos calcular el semieje mayor de la órbita elíptica del planeta, dado por:

$$a = \frac{r_{\text{afelio}} + r_{\text{perihelio}}}{2} = 1,4 \cdot 10^{11}\,\text{m}.$$

Sustituyendo este valor en la Ley de Kepler:

$$T_2 = \sqrt{\frac{4\pi^2a^3}{GM_E}} = 1,19 \cdot 10^8\,\text{s} = 3,78\,\text{años}.$$

Por lo tanto, la masa de la estrella es $1,14 \cdot 10^{29}$ kg y el período del segundo planeta es $3,78$ años.

b) **Calcule la velocidad orbital del primer planeta y, sabiendo que su energía mecánica en su órbita circular es de $-3,8 \cdot 10^{30}$ J, halle la masa de los planetas.**

Para obtener la velocidad orbital del planeta 1, usamos la relación entre el radio orbital y el período:

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1} = 7,97 \cdot 10^3\,\text{m/s}.$$

Conociendo la energía mecánica del planeta 1, podemos encontrar su masa, considerando la siguiente expresión para la energía mecánica total:

$$E_{\text{m}}^1 = \frac{1}{2}M_1v_1^2 - \frac{GM_EM_1}{r_1}.$$

De la ecuación de la órbita, obtenemos la energía cinética:

$$M_1\frac{v_1^2}{r_1} = \frac{GM_EM_1}{r_1^2} \quad \Rightarrow \quad M_1v_1^2 = \frac{GM_EM_1}{r_1}.$$

Sustituyendo esto en la expresión de la energía mecánica:

$$E_{\mathrm{m}}^1 = -\frac{GM_E M_1}{2r_1}.$$

Despejando la masa M_1 del planeta:

$$M_1 = -\frac{2r_1 E_{\mathrm{m}}^1}{GM_E} = 1,2 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}.$$

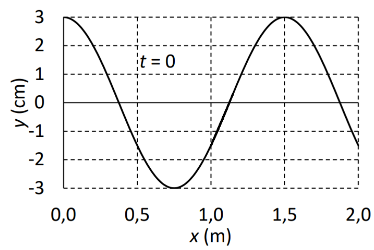
Como se asume que ambos planetas tienen la misma masa, podemos concluir que $M_1 = M_2$.

Por ende, la velocidad orbital del primer planeta es $\mathbf{7,97 \cdot 10^3}$ m/s y la masa de cada planeta es $\mathbf{1,2 \cdot 10^{23}}$ kg.

Pregunta 2. Opción B. Ondas

En la figura se representa la elongación de una onda transversal en el instante $t = 0$ en función de la posición x. La onda se propaga en el sentido negativo del eje x. Sabiendo que el tiempo que tarda el punto situado en $x = 0$ desde que sale de su posición inicial ($t = 0$) hasta que vuelve a la misma es de 0,5 s, determine:

a) **La longitud de onda y la velocidad de propagación.**
b) **La expresión matemática de la onda.**



Solución:

a) **La longitud de onda y la velocidad de propagación.**

Según se observa en el esquema, la longitud de onda es de $1,5\,\mathrm{m}$. Como se indica que el intervalo entre dos oscilaciones consecutivas es de $0,5\,\mathrm{s}$, esto corresponde al período $T = 0,5\,\mathrm{s}$. A partir de estos datos, la velocidad de propagación de la onda se calcula mediante la relación:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{1,5\,\mathrm{m}}{0,5\,\mathrm{s}} = 3\,\mathrm{m/s}.$$

Por lo tanto, la longitud de onda es 1,5 m y la velocidad de propagación es 3 m/s.

b) **La expresión matemática de la onda.**

La ecuación matemática de la onda viene dada por la forma:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t + kx + \varphi).$$

De la figura se puede determinar que la amplitud es $A = 3\,\mathrm{cm}$. La frecuencia angular ω y el número de onda k se calculan como sigue:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi\,\mathrm{rad/s} \quad \text{y} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1,5} = \frac{4\pi}{3}\,\mathrm{rad/m}.$$

Para encontrar la fase inicial φ, utilizamos la condición inicial $y(0,0) = A$, lo que nos lleva a:

$$y(0,0) = A\sin(\varphi) = A \quad \Rightarrow \quad \sin(\varphi) = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}.$$

Así, la ecuación completa de la onda será:

$$\boldsymbol{y(x,t) = 3\sin\left(4\pi t + \frac{4\pi}{3}x + \frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{cm},}$$

donde x está en metros y t en segundos. Si en lugar de la función seno se utiliza el coseno,

la expresión de la onda se escribe como:

$$\boldsymbol{y(x,t) = 3\cos\left(4\pi t + \frac{4\pi}{3}x\right)\ \mathbf{cm}}$$

donde nuevamente $\boldsymbol{x}$ está en metros y $\boldsymbol{t}$ en segundos, puesto que en ese caso

$$y(0,0) = A\cos(\varphi) = A \quad \Rightarrow \quad \cos(\varphi) = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0\,\text{rad}.$$

Pregunta 3. Opción B. Campo Electromagnético

Dos hilos indefinidos paralelos al eje z llevan intensidades iguales $I_1 = I_2 = 2$ A y cortan el plano xy en los puntos $(0,0)$ m y $(4,0)$ m, respectivamente. Si el primer hilo, el que pasa por el origen, lleva su intensidad en el sentido positivo del eje z y el segundo en sentido negativo, determine el campo magnético en los puntos:

a) **$A(0,3)$ m.**
b) **$B(2,3)$ m.**

Dato: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T m A^{-1}.

Solución:

a) **$A(0,3)$ m.**

Para encontrar el campo en el punto A, calcularemos primero los campos magnéticos generados por cada uno de los hilos en ese punto. El campo magnético generado por el hilo 1 en A, que está a 3 m de distancia, solo tiene componente en la dirección x (hacia la izquierda en el eje x), y se puede calcular como:

$$\vec{B}_1(A) = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi \cdot 3}\vec{i} = -1{,}33 \cdot 10^{-7}\vec{i}\,\text{T}.$$

El campo generado por el hilo 2, que se encuentra a una distancia de 5 m de A, tiene componentes tanto en x como en y. Estas componentes se calculan utilizando los valores de $\cos\theta$ y $\sin\theta$, donde θ es el ángulo entre la línea que conecta el punto A y el hilo 2:

$$\cos\theta = \frac{3}{5} \quad \text{y} \quad \sin\theta = \frac{4}{5}.$$

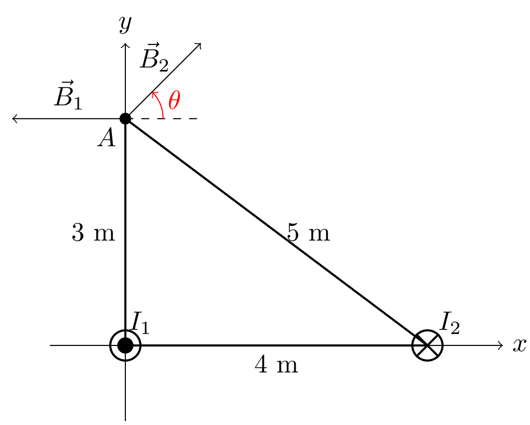
Por lo tanto, las componentes del campo magnético son:

$$B_{2x} = \frac{\mu_0 I_2 \cos\theta}{2\pi \cdot 5} = 4{,}80 \cdot 10^{-8}\,\text{T} \quad \text{y} \quad B_{2y} = \frac{\mu_0 I_2 \sin\theta}{2\pi \cdot 5} = 6{,}40 \cdot 10^{-8}\,\text{T}.$$

El campo magnético total en A es la suma vectorial de estos campos:

$$\vec{B}(A) = \left(-1{,}33 \cdot 10^{-7} + 4{,}80 \cdot 10^{-8}\right)\vec{i} + 6{,}40 \cdot 10^{-8}\vec{j} = \vec{B}(A) = -8{,}53 \cdot 10^{-8}\vec{i} + 6{,}40 \cdot 10^{-8}\vec{j}\,\text{T}.$$

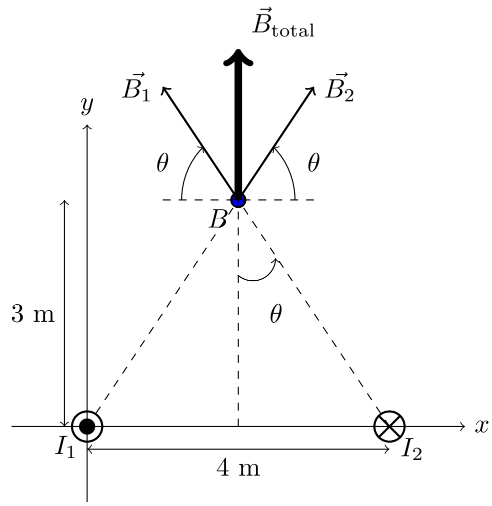
Dibujo representativo:



Por lo tanto, el campo magnético en A es $-8{,}53 \cdot 10^{-8}\vec{i} + 6{,}40 \cdot 10^{-8}\vec{j}$ T.

b) $B(2,3)$ m.

En este punto, las componentes horizontales del campo magnético de los dos hilos se cancelan entre sí debido a la simetría, por lo que solo queda la componente vertical del campo, tal y como se observa en la siguiente figura:



El seno del ángulo θ para el punto B se calcula utilizando la distancia entre B y cualquiera de los dos hilos:

$$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Por lo tanto, el campo magnético total en B es:

$$\vec{B}(B) = 2\cdot\frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{13}}\sin\theta\vec{j} = 1{,}28\cdot 10^{-7}\vec{j}\,\text{T}.$$

Entonces, el campo magnético en B es $1{,}28\cdot 10^{-7}\vec{j}$ T.

Pregunta 4. Opción B. Óptica

Un objeto se encuentra a una distancia de 4 m de una pantalla. Entre el objeto y la pantalla se coloca una lente delgada que produce una imagen en la pantalla 3 veces mayor que el objeto.

a) **Calcule la distancia entre el objeto y la lente, así como su distancia focal.**
b) **Realice el diagrama de rayos.**

Solución:

a) **Calcule la distancia entre el objeto y la lente, así como su distancia focal.**

Sabemos que el aumento lateral M es de 3, es decir, la imagen es tres veces más grande que el objeto. El aumento lateral está relacionado con las distancias objeto-lente (s) e imagen-lente (s') de la siguiente manera:

$$M = \left|\frac{s'}{s}\right| = 3.$$

Esto implica que

$$s' = \pm 3s.$$

Dado que la lente se encuentra entre el objeto y la pantalla, s y s' deben tener signos contrarios, por lo que $s' = -3s$.
Además, la suma de las distancias (en valor absoluto) entre el objeto, la lente y la pantalla debe ser 4 m, ya que esa es la distancia total:

$$-s + s' = 4\,\mathrm{m}.$$

Sustituyendo $s' = -3s$ en la ecuación anterior, obtenemos:

$$-s - 3s = 4\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad -4s = 4\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad s = -1\,\mathrm{m}.$$

Por lo tanto, la distancia entre el objeto y la lente es $s = -1\,\mathrm{m}$, lo que significa que el objeto está a 1 metro del lado opuesto de la lente. Además, se tiene que $s' = 3\,\mathrm{m}$.
Para encontrar la distancia focal, utilizamos la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s}.$$

Sustituyendo los valores de $s' = 3\,\mathrm{m}$ y $s = -1\,\mathrm{m}$:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{-1}\right) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

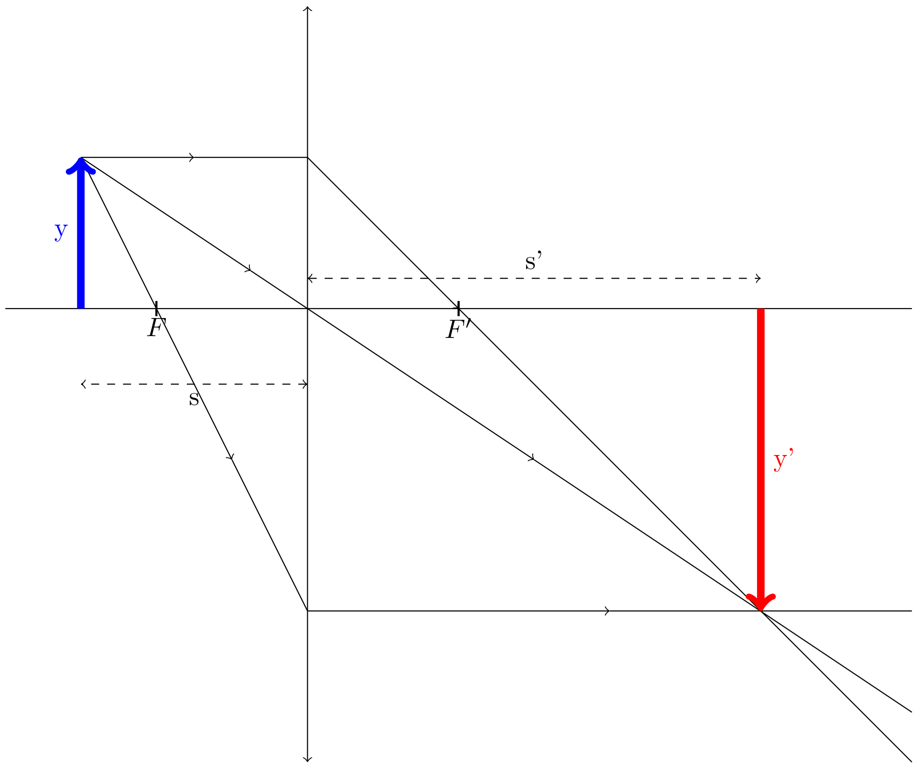
Entonces, la distancia focal es:

$$f' = \frac{3}{4} = 0{,}75\,\mathrm{m}.$$

Por lo tanto, la distancia entre el objeto y la lente es 1 m, y su distancia focal es 0,75 m.

b) **Realice el diagrama de rayos.**

El diagrama de rayos para este sistema puede representarse de la siguiente manera, con la lente convexa y la imagen formada en la pantalla:


y
s'
F
F'
s
y'

Pregunta 5. Opción B. Física Moderna

Cuando se hace incidir un haz de fotones de frecuencia variable sobre la superficie de un material se emiten fotoelectrones de distintas energías cinéticas máximas. Si se representan los potenciales de frenado de los fotoelectrones, V, en función de la frecuencia de los fotones incidentes, f, se obtiene una recta de ecuación:

$$\boldsymbol{V(\mathrm{V}) = 4,16 \cdot 10^{-15} f(\mathrm{Hz}) - 2,16}$$

Obtenga de la expresión anterior:

a) **La frecuencia umbral y el potencial de extracción en eV.**
b) **La constante de Planck.**

Dato: Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Solución:

a) **La frecuencia umbral y el potencial de extracción en eV.**

La frecuencia umbral, f_{umbral}, es aquella a partir de la cual los fotoelectrones comienzan a emitirse, es decir, cuando el potencial de frenado es nulo ($V = 0$). Podemos hallar esta frecuencia sustituyendo en la ecuación de la recta:

$$V = 0 = 4,16 \cdot 10^{-15} f_{\text{umbral}} - 2,16.$$

Despejando f_{umbral}:

$$4,16 \cdot 10^{-15} f = 2,16 \quad \Rightarrow \quad f_{\text{umbral}} = \frac{2,16}{4,16 \cdot 10^{-15}} = 5,2 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}.$$

El trabajo de extracción ($W_{\text{extracción}}$) corresponde a la energía mínima que se requiere para liberar un electrón del material, y está dado por el término independiente en la ecuación, es decir, $W_{\text{extracción}} = 2,16\,\text{eV}$.

Por lo tanto, la frecuencia umbral es $f_{\text{umbral}} = 5,2 \cdot 10^{14}$ Hz y el trabajo de extracción es 2,16 eV.

b) **La constante de Planck.**

Sabemos que la pendiente de la recta, $4,16 \cdot 10^{-15}$ V s, representa el cociente entre la constante de Planck h y la carga del electrón e:

$$\frac{h}{e} = 4,16 \cdot 10^{-15} \text{ V s}.$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por e (donde $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C), obtenemos h:

$$h = 4,16 \cdot 10^{-15} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 6,66 \cdot 10^{-34} \text{ J s}.$$

Así, la constante de Planck es $h = 6,66 \cdot 10^{-34}$ J s.

Por ende, la constante de Planck es $6,66 \cdot 10^{-34}$ J s.